I) Limites :

1) Définition : $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0$

$\forall x \in V(x_0)$ (voisinage de x_0)

$|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

2) Unicité de la limite :

Théorème : si f admet une limite en x_0

alors, celle-ci est unique.

3) Limite et suite :

Théorème : f admet limite ℓ au pt. x_0

$\iff \forall (u_n)$ suite convergente vers x_0

alors $f(u_n)$ converge vers ℓ.

4) Limite à droite et à gauche :

Définition : $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in V(x_0)$

$0 < x - x_0 < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0$

$\forall x \in V(x_0) \quad -\alpha < x - x_0 < 0$

$\Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Propriété :

f admet limite en $x_0 \iff f$ admet lim, à droite et à gauche de x_0, égale

5) Limite d'une fonction monotone :

a) Si f est croissante (décroissante) sur $[a, +\infty[$ $(]-\infty, a])$ et f majorée (minorée). Alors f admet une limite finie en $+\infty$ (resp. $-\infty$)

b) si f est $\nearrow$ (resp. $\searrow$) et f non majorée (non minorée) sur $[a, +\infty[$ $(]-\infty, a])$ alors $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$

$(\lim_{-\infty} f(x) = -\infty)$

6) Opérations sur les limites :

somme, produit, rapport, inverse ✓

7) Limites infinies :

a) FI : $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, $+\infty - \infty$

b) Opérations sur $\pm\infty$: $\frac{k}{\infty} = 0$, $\frac{k}{0} = \infty$

8) Limites usuelles :

a/ Polynômes : $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots$, $\lim_{\infty} P(x) = \lim_{\infty} a_n x^n$

b/ Fonctions rationnelles :

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n \dots}{b_m x^m}$, $\lim_{\infty} f(x) = \lim_{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$

* Si $Q(x_0) = 0$ et $P(x_0) \neq 0$, $\lim_{x_0} f(x) = \infty$
* Si $Q(x_0) = 0$ et $P(x_0) = 0$
alors on écrit $f(x) = \frac{(x-x_0) P_1(x)}{(x-x_0) Q_1(x)} = \dots$

c/ Fonctions irrationnelles :

$f(x) = \sqrt[n]{u(x)}$, si $\lim u(x) = \ell \geq 0$ alors $\lim f(x) = \sqrt[n]{\ell}$
si $\lim u(x) = +\infty$, alors $\lim f(x) = +\infty$

d/ Fonctions trigonométrique :

$\lim_0 \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_0 \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$; $\lim_0 \frac{\tan x}{x} = 1$

9) Règle de l'Hôpital :

$\lim_{x_0, \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x_0, \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

10) Utilisation des fonctions équivalentes :

Déf : f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 si $\lim_{x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
et on écrit $f \underset{(x_0)}{\sim} g(x)$ ou $f = g + o(g)$

Propriétés : si $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2$ alors $f_1 g_1 \underset{x_0}{\sim} f_2 g_2$ et $\frac{f_1}{g_1} \sim \frac{f_2}{g_2}$

Exemple : $1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$; $\sin x \underset{0}{\sim} x$, $x^5 - 3x^2 + 1 \underset{+\infty}{\sim} x^5$

Remarque : si $\lim_{x_0} f = \ell$ alors $f(x) \underset{x_0}{\sim} \ell$

* Théorème : si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ alors $\lim_{x_0} f(x) = \lim_{x_0} g(x)$

11) Limite et ordre :

* Si $f(x) < g(x)$ alors $\lim f(x) < \lim g(x)$
* si $h(x) < f(x) < g(x)$; $\lim h(x) = \lim g(x) = \ell$
alors $\lim f(x) = \ell$.
* si $f(x) < g(x)$, $f(x) \to +\infty \Rightarrow g(x) \to +\infty$
* si $|f(x) - \ell| < g(x)$, $\lim g(x) = 0$, alors $\lim f(x) = \ell$
* $f(x) < g(x)$
$g(x) \to -\infty$
$\Rightarrow f(x) \to -\infty$

II) Continuité :

1) Définition : f cont. en $x_0 \iff \lim_{x_0} f(x) = f(x_0)$

c'à d $\forall \varepsilon > 0$ $\quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in V(x_0) : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

2) Suite et continuité :

Théorème : f cont. en $x_0 \iff \forall (u_n)$ suite convergente vers x_0 alors $f(u_n)$ converge vers $f(x_0)$

f non continue en $x_0 \iff \exists (u_n)$ convergente vers x_0 mais $f(u_n)$ ne converge pas vers x_0

3) Continuité à droite (à gauche)

Définie : f continue à droite (à gauche) en $x_0 \iff \lim_{x_0^+} f(x) = f(x_0)$ ($\lim_{x_0^-} f(x) = f(x_0)$)

Propriétés : f cont en $x_0 \iff f$ cont à droite et à gauche de x_0

4) Prolongement par continuité ⚠

Théorème et définie : si f n'est pas cont. en x_0 et admet une limite finie ℓ en x_0, alors f admet un prolong. par continuité : $\tilde{f} : \begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) & \forall x \neq x_0 \\ \tilde{f}(x_0) = \ell \end{cases}$

5) Continuité sur un intervalle :

f est continue sur un intervalle I si f est continue en tt pt de I (et cont. à droite et à gauche) des pt à l'extrémité de I).

6) Continuité

Les fcts $x \mapsto \sin x$; $x \mapsto \cos x$; polynômes, $x \to e^x$, cont. sur $\mathbb{R}$

les fonctions rationnelles et irrationnelles sont continues sur tt intervalle inclus dans leur domaine de définition. (de mm pr $x \mapsto \tan x$

7) Opérations :

somme, produit, rapport, inverse, composée.

9) Image d'un Intervalle : (par une fct continue ✓)

Théorème 1 : l'image $f(I)$ par fct cont. est d'un intervalle I est un intervalle.

Théorème 2 : " " d'un segment $[a, b]$ est un segment $[m, M]$

on dit ainsi que tte fonction cont. sur un segment $[a,b]$ est bornée et atteint ses bornes. càd

$$\forall x \in [a,b] \quad m \leq f(x) \leq M \text{ et } \exists x_1, x_2 \in [a,b] : f(x_1) = m \quad f(x_2) = M$$

10) Fonction réciproque :

Théorème : si f est cont et strict. monotone sur I alors f admet une fonction réciproque f^{-1} déf sur $J = f(I)$ par :

$$\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases} \iff \begin{cases} x = f(y) \\ y \in I \end{cases}$$

Propriétés :
- f et f^{-1} sont de même sens de variation respectivement sur I et J
- f^{-1} est cont. sur J. C_f et $C_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à $D : y = x$.

Exemples : fonctions réciproques des fonctions trigonométriques

$y = \arcsin x$, $x \in [-1,1] \iff x = \sin y$, $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$y = \arccos x$, $x \in [-1,1] \iff x = \cos y$, $y \in [0, \pi]$

$y = \arctan x$, $x \in \mathbb{R} \iff x = \tan y$, $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

III) DERIVABILITE :

1) définition : f dériv $\iff \lim\limits_{x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe (noté $f'(x_0)$)

2) Dériv & et continuité :

f dériv en $x_0 \Rightarrow f$ cont en x_0.

3) Tangente à la courbe : si f est dériv. en x_0 alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente à la courbe T au pt $(x_0, f(x_0))$ d'equation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

4) Dérivabilité à droite (à gauche)

Déf : f est dériv à droite / à gauche de $x_0 \iff \lim\limits_{x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe

Théorème : f dériv en x_0 $\iff$ f dériv à droite et à gauche de x_0

5) OPERATIONS : somme, produit, rapport, composée

Dérivée de f^{-1} : Si f est dériv en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$

alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

6) formules : $(u+v)' = u'+v'$, $(\lambda u)' = \lambda u'$, $(uv)' = u'v + v'u$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2} \quad , \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad , \quad (u^n)' = nu'u^{n-1}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u) \cdot u'$$

7/ Tableau des dérivées usuelles (voir à la fin)

8/ Dérivées successives : Si f est dérivable n fois alors On pose

$f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$ .. $f^{(3)} = f'''$ --- $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

9/ Formules de Leibniz :

Théorème : soit f et g 2 fct n fois dérivables au pt x_0

alors $$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, f^{(k)}(x_0) \, g^{(n-k)}(x_0)$$

10/ THEOREMES GENERAUX :

a/ Théorème des valeurs intermédiaires :

- si f continue sur $[a,b]$, $f(a).f(b) < 0$, $\exists c \in]a,b[$ tq $f(c) = 0$ (l'eqt $f(x) = 0$ admet au moins une solut. dans $[a,b]$)
- Si de plus f strict. monotone alors c est unique. (Th. Bijection)

b/ Théorème Accroiss. finis : Si f cont. sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$

alors $\exists c \in]a,b[$ $\quad f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$

c/ Théorème de Rolle : f cont $[a,b]$, dériv $]a,b[$

en plus $f(a) = f(b)$ alors $\exists c \in]a,b[$

tq $f'(c) = 0$

⚠ APPLICATION DU T.A.F sur l'intervalle $[0,x]$

Si f continue sur $[0,x]$, dériv sur $]0,x[$:

$\exists \theta \in]0,1[$: $f'(\theta x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$

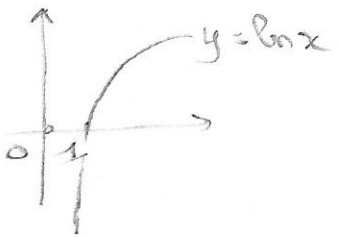
FONCTIONS USUELLES :

a) Logarithme néperien : $\ln x$

$\ln$ cont. dériv, strict croissante sr $]0, +\infty[$

$\ln ab = \ln a + \ln b$, $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$, $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

$\ln a^r = r \ln a$, $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$



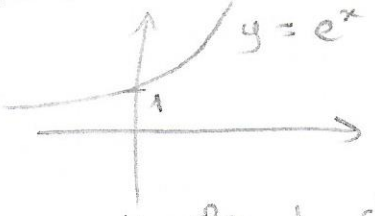
b) Logarithme de base a

$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

c) exponentielle neperien : e^x

e^x : continue, dérivable, strict ↗ sur $\mathbb{R}$

$e^a e^b = e^{a+b}$, $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$, $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$, $(e^a)^b = e^{ab}$, $e^0 = 1$, $e^1 = e$

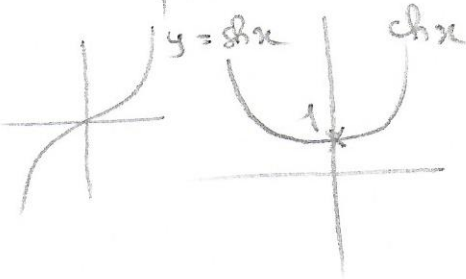


d) exponentielle de base a

$a^x = e^{x \ln a}$

e) sinus hyperbolique : $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

f) cosinus hyperbolique : $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$



g) tangente hyperbolique :

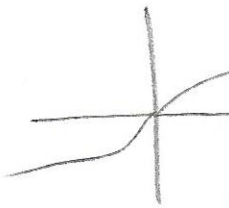
tan $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$

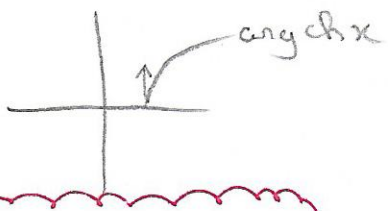
i) Argument sin, cos, tan, hyperboque : Arg sh, arg ch, Arg th

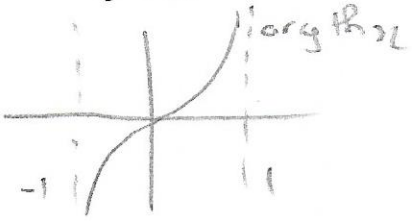
$y = \operatorname{arg sh} x$, $x \in \mathbb{R} \iff x = \operatorname{sh} y$, $y \in \mathbb{R}$

$y = \operatorname{arg ch} x$, $x \in [1, +\infty[\iff x = \operatorname{ch} y$, $y \in \mathbb{R}$

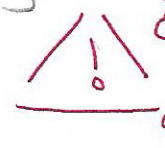
$y = \operatorname{arg th} x$, $x \in]-1, 1[\iff x = \operatorname{th} y$, $y \in \mathbb{R}$







en gros :



$\operatorname{ch} x : \mathbb{R} \longrightarrow [1, +\infty[$

$\operatorname{sh} x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\operatorname{th} x : \mathbb{R} \longrightarrow]-1, 1[$

Remarque : on démontre que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\operatorname{arg sh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

$\forall x \geq 1$ $\operatorname{Arg ch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ $\forall x \in]-1, 1[$ $\operatorname{arg th} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$

DERIVEES USUELLES :

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\ln x)' = 1/x$

$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\cos ax)' = -a \sin ax$ $\quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\sin ax)' = a \cos ax$ $\quad (e^u)' = u' e^u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, $(x^n)' = n x^{n-1}$

$(a^x)' = \ln a \, a^x$

$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$, $(\tan ax)' = a(1 + \tan^2 ax) = \frac{a}{\cos^2 ax}$

$(\tan u)' = u'(1 + \tan^2 u)$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$, $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$,

$(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$ $\quad (\mathrm{ch}\, u)' = u' \mathrm{sh}\, u$

$(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$ $\quad (\mathrm{sh}\, u)' = u' \mathrm{ch}\, u$

$(\mathrm{th}\, x)' = 1 - \mathrm{th}^2 x$

$(\mathrm{arg\,ch}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$, $(\mathrm{arg\,sh}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $(\mathrm{arg\,th}\, x)' = \frac{1}{1-x^2}$

$(\mathrm{arg\,ch}\, u)' = \frac{u'}{\sqrt{u^2 - 1}}$, $(\mathrm{Arg\,sh}\, u)' = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$, $(\mathrm{arg\,th}\, u)' = \frac{u'}{1-u^2}$

Dev. Limités :

P = Partie régulière

Troncature d'un DL :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x) \Rightarrow f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{p} a_k x^k}_{\text{DL d'ordre } p} + x^p \varepsilon_1(x)$$

DL est parité :

- si f est paire, les a_{2k+1} sont nul (P paire)
- Si f impaire les a_{2k} sont nul (P impair)

Pour fct admette un DL :

ordre 0 : f continue

ordre 1 : f ~~cont.~~ dérivable en 0

ordre n : n-fois dérivable

Si f admet DL en un pt Unicité du DL alors il est unique !

Théorème de Taylor Young : $f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f'(x_0) + \theta((x-x_0)^n)$

Corollaire : à $r(0)$: $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots \frac{f^n(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \theta(x^n)$$

à $r(0)$: on peut effectuer :

combinaisons linéaires, produit, quotient de deux DL

$\frac{f}{g}$, $g(0) \neq 0 \Rightarrow \frac{P}{Q}$

on effectue la div suivant les puissances croissantes jusqu'à ordre n.

⚠ À $r(0)$!

composé de deux DLs :

$f \circ g(x)$ admet un DL$_n(0)$

ssi $\begin{cases} f, \text{ admet DL}_n(0) \\ g, \text{ admet DL}_n(0) \\ \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0 \end{cases}$ ⚠

DL par dérivation : (f C^{n+1}, $r(0)$)

$$f(x) = P(x) + \theta(x^{n+1})$$

$$\Rightarrow f'(x) = P'(x) + \theta(x^n)$$

DL par primitivation :

$f(x) = 1 - x^2 + x^3 - x^5 \quad \Rightarrow \quad F(x) =$

II) DEV. Lim. $V(x_0)$, $x_0 \neq 0$

f admet $DL_n(x_0)$ si $\varphi : x \longrightarrow f(x + x_0)$ admet $DL_n(0)$

$$f(x) = P(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

on pose $h = x - x_0$
on fait apparaître h dans l'expression
on fait un $DL(0)$ avec h
on remplace h.

DEV. Lim. voisinage $+\infty$ $(-\infty)$

on pose $h = \frac{1}{x}$, $x \to +\infty\ (-\infty) \Rightarrow h \to 0^+\ (-)$
on essaie de faire sortir h dans l'expression.
on calcul DL en 0 avec h.
on remplace h.

DL Généralisé : $x^p f(x) = \ldots$

- $f = \frac{1}{x - x^2}$, n'admet pas de $DL_n(0)$ car $\lim_0 f(x) = \infty$
- $x f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + \theta(x^n)$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} + 1 + x \ldots x^{n-1} \quad \theta(x^n)$

Applications :

$f(x) \underset{x_0}{\sim} a_r (x - x_0)^r$ (premier terme non nul de P)

outil pr le calcul de limites.

(I) Posi E de Cf / à tangente :

$DL_{x_0}(x_0)$ $f(x) = \underbrace{a_0 + a_1(x-x_0)}_{\text{EQT de la tangente}} + \dots a_n(x-x_0)^n$

$$f(x) - [a_0 + a_1(x_0-x_0)] \underset{x_0}{\sim} a_m(x-x_0)^m \quad (\text{le premier terme tq } a_m \neq 0)$$

m pair
$a_m > 0 \Rightarrow$ Cf au dessus de T
$a_m < 0 \Rightarrow$ Cf en dessous de T

m impair
(Cf) traverse (T) au voisinage de x_0
T, tangente d'inflexion

(II) Posi E de Cf / à une asymptote :

$DL^{\pm\infty}_{\pm\infty}$: $\frac{f(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots \frac{a_n}{x^n} + \theta\left(\frac{1}{x^n}\right)$

$\times X$: $f(x) = \underbrace{a_0 X + a_1}_{\text{cette droite est asymptote à Cf à } v(\pm\infty)} + \dots \frac{a_n}{x^{n-1}} + \theta\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right)$

$$f(x) - [a_0 X + a_1] \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{a_m}{x^{m-1}} \quad (1^{er} \text{ terme tq } a_m \neq 0)$$

on en déduit la posi E. de f / Δ à $v(\pm\infty)$

III) Recherche des extrêmas :

$DL_n(x_0)$

$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) \dots a_n(x-x^n) + \theta(x-x_0)^n$

Si $a_1 \neq 0$, $\Rightarrow (x_0, f(x_0))$ n'est pas un extremum

Si $a_1 = 0 \Rightarrow f(x) - a_0 \sim a_m(x-x_0)^m$ (1^{er} terme $\neq 0$)

* m pair : $a_m > 0 \Rightarrow (x_0, f(x_0))$ minimum
$a_m < 0 \Rightarrow (x_0, f(x_0))$ maximum
c'est à dire Cf en dessous de T

INTEGRATION

f cont sur $[a,b]$ $\Rightarrow$ elle admet primitive.

Linéarité de l'$\int$: $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\,dt$

$= \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt$

Positivité et croissance :

* $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt \geq 0$
* $f \geq g \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt \geq \int_a^b g(t)\,dt$
* $\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$

Relation de Chasles : f cont. $[a,b]$, $c_i \in [a,b]$

$$\int_{c_1}^{c_n} f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(t)\,dt$$

Inégalité de Cauchy-Schwartz :

Si f, g cont. $[a,b]$, on a

$$\left(\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t)\,dt \right) \cdot \left(\int_a^b g^2(t)\,dt \right)$$

attention $\left(\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt \right)^2 \neq \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt \cdot \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt$

Formule de la moyenne Generalisée :

Soit f, g, cont $[a,b]$

$g \geq 0$ sur $[a,b]$

Alors $\exists c \in [a,b]$ $\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt = f(c) \int_a^b g(t)\,dt$

Formule de la moyenne :

f fonct. cont sur $[a,b]$

$\exists c \in [a,b]$ $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt$

Proposition :

u, v de classe C^1 sur I

$u(I) \subset J$, $v(I) \subset J$

f cont. sur J alors :

$\phi(x) = \int_{u(x)}^{g(x)} f(t)\,dt$ est C^1 sur I

$\forall x \in I \quad \phi'(x) = f(v(x))\,v'(x) - f(u(x))\,u'(x)$

démo : $(g \circ f)' = g' \circ f \cdot f'$ ... ✓

IPP : $\int_a^b u(t).v'(t)\,dt = \left[u(t).v(t)\right]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt$

* il faut procéder par ALPES !

Primitives de $\sin^p x \cos^q x$:

p paire q impaire → on pose $t = \sin x$

q paire p impaire → on $t = \cos x$

p, q les 2 sont pairs ⟶ linéarise

les 2 impairs : on a le choix.

Linéarisation :

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ $\qquad$ $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

Fractions Rationnelles :

$\frac{P(x)}{Q(x)}$, on décompose en éléments simples, et on intègre

$\int \frac{x-1}{x^2+x+1}$ ~~$\int \frac{ax+b}{x^2+x+1}$~~

$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$ ⟶ du type $\frac{1}{ax^2+bx+c}$, $\Delta < 0$

$\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|$ $\qquad$ $\alpha\left(\frac{1}{1+v^2}\right)$

Primitives de $P(x).e^{ax}$:

1) - IPP Successives , 2) ou - chercher $\int P(x)e^{ax} = Q(x)e^{ax}$

Exemple : $\deg P = \deg Q$

$$\int (x^3 - 2x + 1)e^{-x}\,dx$$

signe	Dérivées	primitive
		e^{-x}
+	$(x^3 - 2x + 1)$	$-e^{-x}$
−	$3x^2 - 2$	e^{-x}
+	$6x$	$-e^{-x}$
−	6	e^{-x}
+	0	

$$\int (\ )e^{-x}\,dx = +(x^3 - 2x+1)(-e^{-x}) - (3x^2 - 2)e^{-x} + 6x(-e^{-x})$$
$$- 6e^{-x} = (-x^3 - 3x^2 - 4x + 5)e^{-x} + cte$$

2) $\int (\ )e^{-x}\,dx = Q(x)e^{-x} + cte$ (I)

$d^\circ\varphi = 3$, $\varphi = ax^3 + bx^2 + cx + d$

on dérive les 2 cotés de EQT (I) :

$$(x^3 - 2x+1)e^{-x} = Q'(x)e^{-x} - Q(x)e^{-x}$$
$$= (3ax^2 + 2bx + c)e^{-x} - (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{-x}$$
$$= \dots$$

Identifica E

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = -4 \\ c = -3 \\ d = -1 \end{cases}$$

Intégrale Fract. Ratio. en $\cos x, \sin x, \tan x$

* le changement classique :

$t = \tan\frac{x}{2}$

$x = 2\arctan t$

$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = \tan 0 = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \tan\frac{\pi}{4} = 1 \end{cases}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dots dx \Rightarrow \int_0^1 \dots dt$

Règle de Bioche :

Si $f(x)\,dx$ reste invariante par le changement

1. $x \longmapsto -x$; on pose $t = \cos x$
2. $x \longmapsto \pi - x$; on pose $t = \sin x$
3. $x \longmapsto \pi + x$; on pose $t = \tan x$

Integrale abelienne de 1ère espèce :

$y = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, dans ce cas il suffit d'exprimer x en fct de y.

⚠ on pourrait avoir besoin de J_1, J_2, ...

$$J_1 = \int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan(t) + K$$

$$J_2 = \int \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt$$

Pr calculer J_2 on fait une IPP à J_1

$u = \dfrac{1}{1+t^2}$ $\quad u' = -\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}$

$v' = 1$ $\quad v = t$

$\Rightarrow J_1 = \left[\dfrac{t}{1+t^2}\right] + \displaystyle\int \frac{+2t^2}{(1+t^2)^2}\,dt$

$$\frac{2t^2}{(1+t^2)^2} = \underbrace{\frac{2}{1+t^2}}_{2J_1} - \underbrace{\frac{2}{(1+t^2)^2}}_{2J_2}$$

donc $J_1 = \left[\dfrac{t}{1+t^2}\right] + 2J_1 - 2J_2$

on déduit alors J_2 en remplaçant J_1 par arctan.

Integrale abelienne de deuxième espèce :

$$\sqrt{ax^2+bx+c}$$

- forme canonique

$\cos^2 + \sin^2 = 1$

$ch^2 - sh^2 = 1$

$\sqrt{t^2+1}$: ou $\sqrt{t^2-1}$: ou $\sqrt{1-t^2}$:

$t = sh\,u$ $\Rightarrow \sqrt{t^2+1} = ch\,u$

$t = ch\,u$ $\Rightarrow \sqrt{t^2-1} = sh\,u$

$t = \cos u$ ou $\sin u$

$\sqrt{1-t^2} = \sin u$ ou $\cos u$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

on l'écrit sous forme :

$\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ $t = \sin$ ou $\cos$ → $\arcsin t$ ou $\arccos t$ (−)

$\int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$ $t = \mathrm{ch}$ → $\mathrm{argch}\, t$

$\int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ $t = \mathrm{sh}$ → $\mathrm{argsh}\, t$

Intégration des fonctions en sh x, ch x, th x

on pose $t = \th\frac{x}{2}$

$$\mathrm{ch}\, x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

$$\mathrm{sh}\, x = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\th x = \frac{2t}{1+t^2}$$

INTEGRALES GENERALISEES

- on cherche à integrer f sur Interv. non borné
- ou à integrer sur $[a,b]$ une fct non bornée en a ou en b

Cette integrale est dite <u>generalisée</u> ou <u>impropre</u>.

$I = [a,b[$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,dt$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt$$

$I =]a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to a} \int_x^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{x\to-\infty} \int_x^b f(t)\,dt$$

$I =]a,b[$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dt + \int_c^b f(x)\,dx$$

Calculs : changement de variables, IPP, on considère ensuite la limite

Exemples de référence :

- Riemann :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \begin{cases} \text{cv si } \alpha < 1 \\ \text{div si } \alpha \geq 1 \end{cases} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \begin{matrix} \text{cv si } \alpha > 1 \\ \text{div si } \alpha \leq 1 \end{matrix}$$

- Bertrand :

$$\forall a \in]1,+\infty[\quad \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\beta (\ln x)^\alpha}\,dx \quad \text{cv ssi} \quad \begin{cases} \beta > 1, \ \alpha \in \mathbb{R} \\ \beta = 1, \ \alpha > 1 \end{cases}$$

$\forall a \in]0,1[$ $\int_0^a \frac{1}{x^\beta |\ln x|^\alpha} dx$ converge ssi $\begin{cases} \beta < 1, \alpha \in \mathbb{R} \\ \beta = 1, \alpha > 1 \end{cases}$

Critères de convergence :

- f, g integ. $[a,b[$: $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ cv $\Rightarrow \int_a^b \alpha f(t) + \beta g(t)\,dt$ cv
  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

* ! Pour les fonctions POSITIVES :

$f \leqslant g$, $[a,b[$

- $\int_a^b g\,dt$ cv $\Rightarrow \int_a^b f\,dt$ cv
- $\int_a^b f\,dt$ div $\Rightarrow \int_a^b g(t)\,dt$ div
- si $f \underset{b}{\sim} g$ alors $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ même cv, ou même div

Convergence absolue : $\int_a^b |f(t)|\,dt$ cv $\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt$ cv absolument

Tte Int. generalisée abs. cv est convergente.

* Utile pr étudier les fonctions de signe quelconque (non positive)

Semi-Convergence : converge, mais ne converge pas absolument

méthodes pr prouver : IPP, Th. Abel ...

Theoréme d'Abel : f, g int sur $[a, +\infty[$

f positive, $\searrow$ sur $[a, +\infty[$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\exists M > 0$ tq $\forall x \in [a, +\infty[$ $\left| \int_a^x g(t)\,dt \right| \leqslant M$

} alors $\int_a^{+\infty} f \cdot g\,dt$ converge

exemple :

$\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ positive, $\searrow$, $\lim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ ✓

de plus $\left| \int_0^x \cos x\,dt \right| = \left| [\sin x]_0^x \right| = |\sin x| \leqslant 1$ ✓

d'après ABEL l'integrale convergente.

BAPPEL :

$e^x \underset{0}{\sim} 1 + x$

$e^{f(x)} \underset{v(x)}{\sim} 1 + f(x)$ ssi $f(x) \xrightarrow{x \to a} 0$

⚠ fct ⊕

BAPPEL : (fct ⊕)

$\frac{f}{g} \longrightarrow 0$

$f = o(g)$

$\int g\,dt$ cv $\Rightarrow \int f\,dt$ cv

EQUATIONS DIFF. 1er Ordre

* eqt variables séparable : simple : $y' + y = a$; $y - 2xy' = 1$

* $y'(x) = g\left(\frac{y}{x}\right)$, on pose $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = u \times x$, $y' = u + xu'$
on introduit dans E.
exp : $y' = e^{y/x} + y/x$, $y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$ $\left(= \frac{x^2\left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right)}{x^2\left(2\frac{y}{x}\right)} \right)$

* $y'(x) = g(ax + by)$, on $y = ax + by$, $y = \dots$, $y' = \dots$, Introduire dans (E)
exp : $y' = (x + y)^2$

EQUAE linéaire du 1er ordre :
(E) : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$
Theorème fondamental : la solution de E est de la forme :
$$y(x) = y_0(x) + y_p(x)$$
avec y_0 solue de EQT homogéne (E_0) : $a(x)y' + b(x)y = 0$
et y_p solue particulière de (E).
Step ① : Resolue de (E_0) ; $y_0(x) = \lambda y_1(x)$
Step ② : Méthode variae de la cte : $y_p(x) = \lambda(x) y_1(x)$
$y_p'(x) = \lambda'(x) y_1(x) + \lambda(x) y_1'(x)$ / on remplace dans (E).
on trouve $\lambda'(x)$, on integre pr $\lambda(x)$
ainsi $y_p(x) = \lambda(x) y_1(x)$
step ③ : la solue generale : $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$

EQT de BERNOUILLI :
(B) : $a(x)y' + b(x)y = c(x)y^\alpha(x)$ $(\alpha \neq 1)$
• on multiplie par $y^{-\alpha}$, on pose $z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = -y'y^{-\alpha}\dots$
on se ramène à une eqt. de 1er ordre.

Exemple : $y' + 2xy + 2xy^2 = 0$

EQT Riccati :
(R) : $y' + a(x)y + b(x)y^2 + c(x) = 0$
/!\ on ne peut integrer que si on connait une solue particulière
Resolution : on pose $y(x) = y_p(x) + z(x)$ [ou $z(x) = y(x) - y_p(x)$]
exemple : $y' - \frac{y}{x} - x^3y^2 + x^5 = 0$ (on voit que $y_0 = x$ solue de (R)) — bolten

EQUATIONS DIFF. Second ordre coeff. cstants.

$a, b, c \in \mathbb{R}$

(E) : $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$, $f = 0 \Rightarrow (E_0)$

Principe de Superposition :

$y(x) = y_0(x) + y_p(x)$

Intégrale de l'EQT homogène : (E_0) : $ay'' + by' + cy = 0$

$P(r) = ar^2 + br + c$, $\Delta = b^2 - 4ac$. 3 cas :

1) $\Delta > 0$:

$r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$; $r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}$, $y_2 = e^{r_2 x}$

2 solut. linéair. indép.

$\Rightarrow$ Solut générale :

$y_0(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$

2) $\Delta = 0$:

$r_0 = \frac{-b}{2a}$

$\Rightarrow y_1 = e^{r_0 x}$

$y_2 = x e^{r_0 x}$

2 sol. indép.

Sol° générale :

$y_0(x) = (c_1 + c_2 x) e^{r_0 x}$

3) $\Delta < 0$: l'EQT caractéristique possède 2 racines complex. conjuguées

$\begin{cases} r_1 = u + i\omega \\ r_2 = u - i\omega \end{cases}$ $\left(\begin{array}{l} r_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \\ r_2 = \overline{r_1} \end{array} \right\}$ $\begin{array}{l} y_1(x) = e^{ux} \cos(\omega x) \\ y_2(x) = e^{ux} \sin(\omega x) \end{array}$

$\Rightarrow$ solution générale : $y_0(x) = e^{ux}(c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x))$

METHODE VARIATION Cte :

on résout (S) : $\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = \frac{f(x)}{a} \end{cases}$

$c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_{syst}}$; $c_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_{syst}}$